- Funkcije više promjenljivih -

Neka je R skup realnih brojeva i $D \subseteq R^n$ gdje je $R^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) | x_1 \in R, \dots, x_n \in R\}$. Preslikavanje $f: D \to R$ naziva se realna funkcija sa n nezavisno promjenljivih čiji je domen D. Ako ~~sa~~ označimo sa $x = (x_1, \dots, x_n)$ proizvoljni element iz X i sa $u \in R$ sliku elementa x preko preslikavanja f onda možemo pisati $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Funkciju sa dvije nezavisno promjenljive obično označavamo sa $z = f(x, y)$ gdje su x i y nezavisno promjenljive. Slično, funkciju sa tri nezavisno promjenljive označavamo sa $u = f(x, y, z)$ gdje su x, y i z nezavisno promjenljive.

Primjer 1: Odrediti oblast definisanosti funkcije:

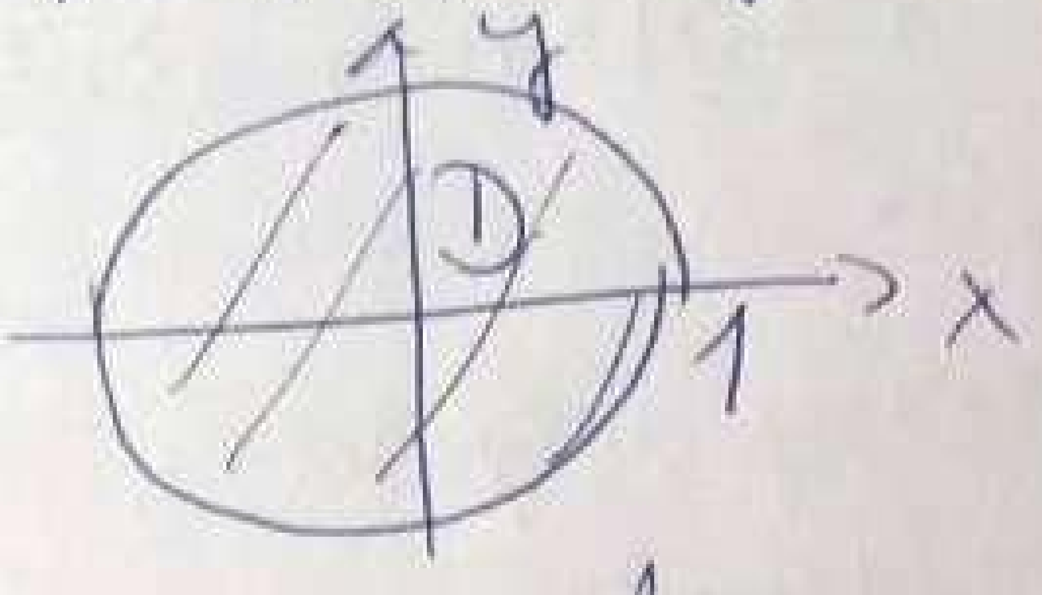
a) $z = -2x - y + 1$

Očigledno, $D = \{(x, y) | x \in R, y \in R\} = R^2$.

b) $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$

U ovom slučaju $D=\{(x,y)\mid 1-x^2-y^2\geq 0\}=$

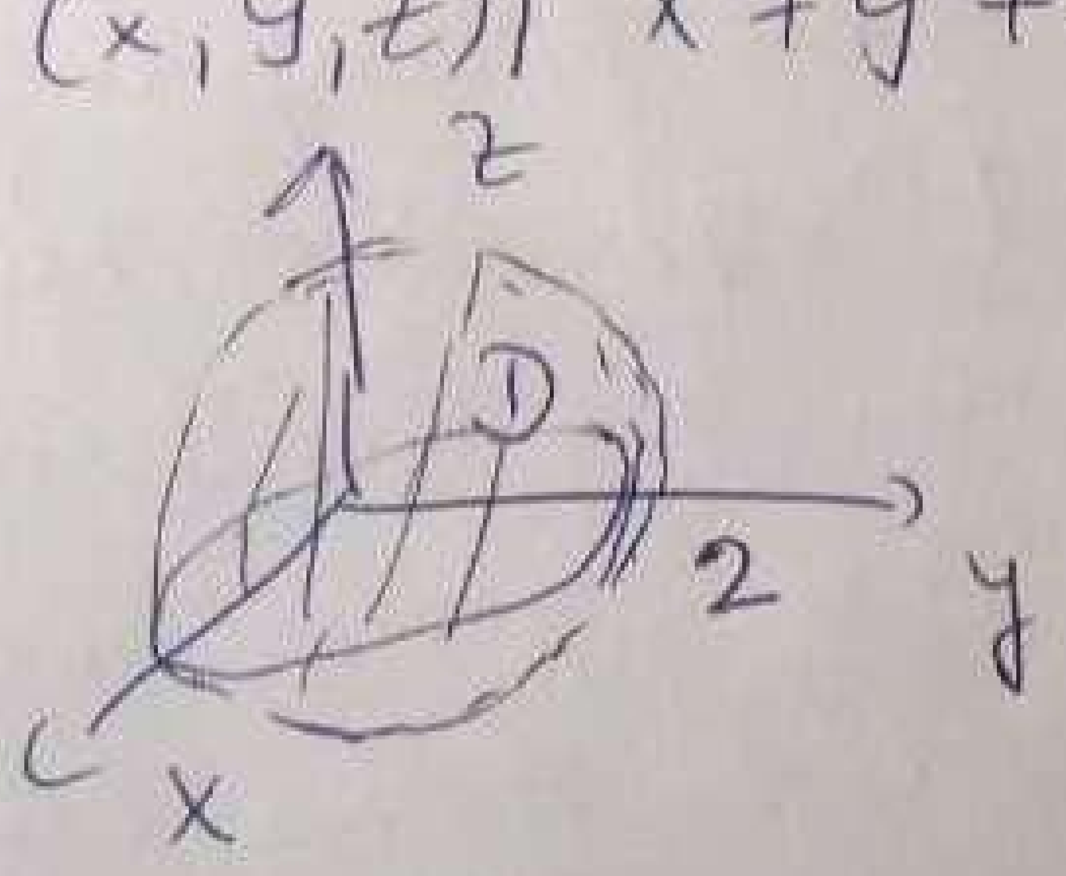
$=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leq 1\}$



c) $u=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2-z^2}}$

U ovom slučaju $D=\{(x,y,z)\mid 4-x^2-y^2-z^2>0\}=$

$=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2<4\}$ → sve tačke koje su unutar sfere sa centrom $O(0,0,0)$, poluprečnika $r=2$.



– Granična vrijednost i neprekidnost funkcije više promjenljivih –

Ako su $P(x_1,y_1)$ i $Q(x_2,y_2)$ tačke u $\mathbb{R}^2$ tada se rastojanje između ovih tačaka definiše na sledeći način:

$$d(P,Q)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

Slično, ako su $P(x_1, y_1, z_1)$, $Q(x_2, y_2, z_2)$ tačke iz $\mathbb{R}^3$ tada se rastojanje između ovih tačaka definiše na sledeći način:

$$d(P,Q) = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}.$$

Def 1: Za niz tačaka (M_n) iz $\mathbb{R}^2$ kažemo da konvergira tački $M \in \mathbb{R}^2$ ako važi:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)\ d(M_n, M) < \varepsilon.$$

Oznaka: $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = M$ ili $M_n \to M$ kad $n \to \infty$.

Neka je $M_n = (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$ i $M = (x, y)$.

Teorema 1: Niz tačaka (M_n) iz $\mathbb{R}^2$ konvergira tački $M(x, y)$ ako i samo ako ~~[illegible]~~ niz (x_n) realnih brojeva konvergira broju x, a niz (y_n) realnih brojeva konvergira broju y.

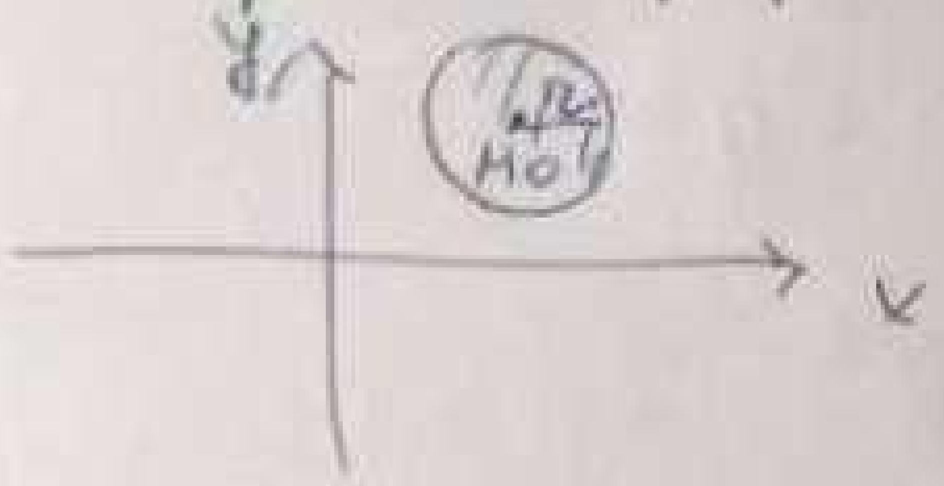
Primer: Neka je (M_n) niz tačaka iz $\mathbb{R}^2$ gde je $M_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{n+1}{n+2}\right)$.

$\lim\limits_{n\to\infty} M_n = (0,1)$ jer je $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+2} = 1$.

Dakle, niz (M_n) konvergira tački $M(0,1)$, kad $n \to \infty$.

Neka je $M_0(x_0,y_0)\in R^2$.

Pod r-okolinom tačke $M_0(x_0,y_0)$ podrazumijevamo skup $K(M_0,r)=\{M\in R^2 \mid d(M,M_0)<r\}$.



<u>Def1</u> Neka je funkcija $f(M)=f(x,y)$ definisana u nekoj okolini tačke M_0 osim možda u samoj tački M_0. Broj $A\in R$ je granična vrijednost funkcije f u tački M_0 ako važi:

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0):(d(M,M_0)<\delta \Rightarrow |f(M)-A|<\varepsilon).$$

Oznaka: $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)=A$ ili $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$.

<u>Def2</u>: Broj $A\in R$ je granična vrijednost funkcije $f(M)=f(x,y)$ u tački $M_0(x_0,y_0)$ ako za svaki niz (M_n) ($M_n\in D_f$, $M_n\neq M_0$) koji konvergira tački M_0, niz slika $(f(M_n))$ konvergira broju A.

<u>Primjer 1</u>: Izračunati $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}} (x^2+y)$.

Ako niz $(x_n,y_n)\to(1,2)$ tada $x_n\to 1$, $y_n\to 2$, $n\to\infty$. Kako je $f(x,y)=x^2+y$ to je $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n,y_n)=\lim\limits_{n\to\infty} x_n^2+y_n=3$. Dakle, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}} x^2+y=3$.

Primjer: Pokazati da $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{x^2+y^2}$ ne postoji.

R/ Uočimo nizove $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, 0\right)$ i $(x_n', y_n') = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$.

Tada $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, 0\right) \to (0,0),\ n\to\infty$

i $(x_n', y_n') = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \to (0,0),\ n\to\infty$.

Pri tome, $f(x_n, y_n) = \frac{x_n y_n}{x_n^2 + y_n^2} = \frac{\frac{1}{n}\cdot 0}{\frac{1}{n^2}+0} = 0 \to 0,\ n\to\infty$

dok $f(x_n', y_n') = \frac{x_n' y_n'}{x_n'^2 + y_n'^2} = \frac{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}}{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2} = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2},\ n\to\infty$.

Dakle, ne postoji $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{x^2+y^2}$

Teorema 1: Ako je $\lim\limits_{M\to M_0} f(M) = l_1$, $\lim\limits_{M\to M_0} g(M) = l_2$

tada je:

1° $\lim\limits_{M\to M_0} [f(M) + g(M)] = l_1 + l_2$

2° $\lim\limits_{M\to M_0} (f(M)\cdot g(M)) = l_1 \cdot l_2$

3° $\lim\limits_{M\to M_0} \frac{f(M)}{g(M)} = \frac{l_1}{l_2}$ $(l_2 \neq 0,\ g(M)\neq 0)$.

Def: Neka je funkcija $f(M)=f(x,y)$ definisana u okolini tačke $M_0(x_0,y_0)$. Za funkciju f kažemo da je neprekidna u tački M_0 ako je

$$\lim_{M\to M_0} f(M) = f(M_0).$$

Ako je funkcija neprekidna u svakoj tački neke oblasti D, onda kažemo da funkcija neprekidna na skupu D.

Analogno se uvode pojmovi granične vrijednosti i neprekidnosti za funkcije tri i više promjenljivih.

- Parcijalni izvodi -

Neka je funkcija $z=f(x,y)$ definisana na oblasti $D\subseteq R^2$ i neka (x,y), $(x+\Delta x, y)$, $(x, y+\Delta y)$, i $(x+\Delta x, y+\Delta y)$ pripadaju oblasti D.

- Izraz $\Delta_x z = f(x+\Delta x, y) - f(x,y)$ nazivamo parcijalnim priraštajem funkcije $z=f(x,y)$ po promjenljivoj x.
- Izraz $\Delta_y z = f(x, y+\Delta y) - f(x,y)$ nazivamo parcijalnim priraštajem funkcije $z=f(x,y)$ po promjenljivoj y.
- Izraz $\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$ naziva se totalnim priraštajem funkcije $z=f(x,y)$ u tački (x,y).

Def 1 Granična vrijednost (ako postoji)

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

naziva se prvim parcijalnim izvodom funkcije $z = f(x,y)$ po promjenljivoj x u tački (x,y) i označava sa z'_x ili $\frac{\partial z}{\partial x}$ ili $\frac{\partial f}{\partial x}$ ili f'_x.

Slično, granična vrijednost (ako postoji):

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$

naziva se prvim parcijalnim izvodom po promjenljivoj y u tački (x,y) i označava sa z'_y ili $\frac{\partial z}{\partial y}$ ili $\frac{\partial f}{\partial y}$ ili f'_y.

Pravila za izračunavanje parcijalnih izvoda su ista kao i kod izračunavanja izvoda funkcije jedne promjenljive, samo što se pri nalaženju parcijalnih izvoda po jednoj promjenljivoj ostale promjenljive posmatraju kao konstante.

Primjer 1 Izračunati parcijalne izvode funkcije:

a) $z = x^4 + y^4 - x^2y^2$

a) $z = x^4 + y^4 - x^2y^2$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 - 2xy^2, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 4y^3 - 2yx^2$$

b) $z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}} \cdot \frac{1}{y} = \frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{x}{x^2+y^2}$$

c) $z = \sin x \cdot \cos\sqrt{y}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos x \cdot \cos\sqrt{y}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \sin x \cdot (-\sin\sqrt{y}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

Def 2: Neka je funkcija $u = f(x, y, z)$ definisana u oblasti $D \subseteq R^3$ i neka (x, y, z), $(x+\Delta x, y, z)$, $(x, y+\Delta y, z)$, $(x, y, z+\Delta z)$ pripadaju oblasti D.

- Izraz $\Delta_x u = f(x+\Delta x, y, z) - f(x, y, z)$ naziva se parcijalnim priraštajem funkcije $u = f(x, y, z)$ po promjenljivoj x.
- Izraz $\Delta_y u = f(x, y+\Delta y, z) - f(x, y, t)$ naziva se parcijalnim priraštajem funkcije $u = f(x, y, z)$ po promjenljivoj y.

- Izraz $\Delta_z u = f(x,y,z+\Delta z) - f(x,y,z)$ naziva se parcijalnim priraštajem funkcije $u=f(x,y,z)$ po promjenljivoj z.

Def 2: - Granična vrijednost:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x,y,z)-f(x,y,z)}{\Delta x}$$ naziva se

prvim parcijalnim izvodom funkcije $u=f(x,y,z)$ po promjenljivoj x u tački (x,y,z) i označava sa u'_x ili $\frac{\partial f}{\partial x}$ ili f'_x ili $\frac{\partial u}{\partial x}$.

- Granična vrijednost:

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y u}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x,y+\Delta y,z)-f(x,y,z)}{\Delta y}$$ naziva

se prvim parcijalnim izvodom funkcije $u=f(x,y,z)$ po promjenljivoj y u tački (x,y,z) i označava sa u'_y ili $\frac{\partial f}{\partial y}$ ili f'_y ili $\frac{\partial u}{\partial y}$.

- Granična vrijednost:

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta_z u}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(x,y,z+\Delta z)-f(x,y,z)}{\Delta z}$$ naziva

se prvim parcijalnim izvodom funkcije $u=f(x,y,z)$ po promjenljivoj z u tački (x,y,z) i označava sa u'_z ili $\frac{\partial f}{\partial z}$ ili f'_z ili $\frac{\partial u}{\partial z}$.

Primjer 2: Izračunati parcijalne izvode funkcije:

a) $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ b) $u=xyz+e^{\sqrt{xy}}$

R: a) $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\cdot 2x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\cdot 2y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\cdot 2z=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

b) $\frac{\partial u}{\partial x}=yz+e^{\sqrt{xy}}\cdot\sqrt{y}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$\frac{\partial u}{\partial y}=xz+e^{\sqrt{xy}}\cdot\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}}$

$\frac{\partial u}{\partial z}=xy$

Definicija 3: Realna funkcija $z=f(x,y)$ je diferencijabilna u tački (x,y) ako se njen totalni priraštaj može zapisati u obliku:

$\Delta z=f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x,y)=A\cdot\Delta x+B\cdot\Delta y+\alpha(\Delta x,\Delta y)\cdot\Delta x+$
$+\beta(\Delta x,\Delta y)\cdot\Delta y$, gdje su A i B realni brojevi, pri čemu je $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\alpha(\Delta x,\Delta y)=0$ i $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\beta(\Delta x,\Delta y)=0$.

Izraz $A\Delta x + B\Delta y$ naziva se totalnim diferencijalom funkcije $z=f(x,y)$ u tački (x,y) i označava sa dz. Umjesto Δx i Δy pišemo dx i dy.
Dakle, $dz = A\,dx + B\,dy$ (1)

Teorema 1 Ako je funkcija $z=f(x,y)$ diferencijabilna u tački (x,y), onda u tački (x,y) postoje svi parcijalni izvodi $\frac{\partial f}{\partial x}$ i $\frac{\partial f}{\partial y}$ i pri tome je $A = \frac{\partial f}{\partial x}$ i $B = \frac{\partial f}{\partial y}$ pa formulu (1) možemo zapisati u obliku $\boxed{dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy}$

Teorema 2: Ako funkcija $z=f(x,y)$ ima parcijalne izvode $\frac{\partial f}{\partial x}$ i $\frac{\partial f}{\partial y}$ u nekoj okolini tačke (x,y) i ako su oni neprekidni u tački (x,y) tada je funkcija $z=f(x,y)$ diferencijabilna u tački (x,y).

Dakle, ako f-ja $z=f(x,y)$ zadovoljava uslove teoreme 2, onda je:

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$ - totalni diferencijal funkcije $z=f(x,y)$.

Na isti način se definiše totalni diferencijal i diferencijabilnost funkcije $u = f(x,y,z)$. Teoreme analogne prethodnim važe i za slučaj funkcije tri promjenljive.

$du = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$ - diferencijal funkcije $u = f(x,y,z)$.

– Parcijalni izvodi višeg reda –

Parcijalni izvodi funkcije $z = f(x,y)$ su ponovo funkcije od dvije promjenljive x i y, pa možemo govoriti o njihovim parcijalnim izvodima po promjenljivim x i y. Tako se dobijaju parcijalni izvodi drugog reda:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Pokazuje se da ako su parcijalni izvodi $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ i $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ neprekidne funkcije onda važi jednakost:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

Analogno se definišu parcijalni izvodi trećeg, ... višeg reda.

Diferencijal drugog reda funkcije $z=f(x,y)$ definišemo formulom: $d^2 z = d(dz)$.

Odredimo drugi diferencijal funkcije $z=f(x,y)$.

$$d^2 z = d(dz) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)\cdot dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)\cdot dy$$

$$= \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot dx + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dy\right)dx + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy\right)dy$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2.$$

Vidimo da dobijeni izraz ima oblik kvadrata binoma što simbolički zapisujemo na sledeći način:

$$d^2 z = \left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)^2$$

Kao što smo definisali parcijalne izvode drugog reda za funkciju dvije promjenljive tako možemo definisati parcijalne izvode drugog reda funkcije $u = f(x,y,z)$. Ova funkcija ima devet parcijalnih izvoda drugog reda:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}, \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y}.$$

Pri tome ako su mješoviti izvodi drugog reda neprekidni onda važi $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$,

$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x}$.

Drugi diferencijal funkcije $u = f(x, y, z)$ definisan je formulom $d^2u = d(du)$. Pokazuje se da važi:

$$d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} dxdz +$$
$$+ 2\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} dydz + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} dz^2.$$

Primjer: Za funkciju $u = x^4 z + z^2 y^2 + x^2 y$ izračunati du i d^2u.

R: $\frac{\partial u}{\partial x} = 4x^3 z + 2xy$ $\frac{\partial u}{\partial y} = 2yz^2 + x^2$, $\frac{\partial u}{\partial z} = x^4 + 2y^2 z$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 12x^2 z + 2y$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2z^2$ $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 2y^2$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2x$ $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = 4yz$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = 4x^3$

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz = (4x^3 z + 2xy) dx +$$
$$+ (2yz^2 + x^2) dy + (x^4 + 2y^2 z) dz$$

$$d^2u = (12x^2 z + 2y) dx^2 + 4x\, dxdy + 2z^2 dy^2 + 8x^3 dxdz$$
$$+ 8yz\, dydz + 2y^2 dz^2$$